

物理で使う数学 / 勾配・発散・回転

1 スカラー場の勾配

勾配と微分演算子 ∇

スカラー関数 $\phi = \phi(x, y, z)$ に対する勾配は,

$$\text{grad } \phi = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi \quad (1)$$

と書くことができる。これは、スカラー関数 ϕ に微分演算子

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2)$$

(∇ はナブラと読む) が作用したものと考えることができる。すなわち、勾配は ∇ を用いて,

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi \quad (3)$$

と書くことができる。

スカラー場の勾配

スカラー関数 $\phi = \phi(x, y, z)$

$$\text{スカラー関数の全微分} \quad d\phi = \underbrace{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)dz}_{\text{}} \quad (4)$$

x 方向に dx 移動した
ときの ϕ の変化

$d\phi$ は、 $\phi(x, y, z)$ を x, y, z の各方向にそれぞれ dx, dy, dz 移動したときの変化量を足し合わせたものを意味する。

$$\text{微小変位} \quad d\vec{r} = (dx, dy, dz) = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (5)$$

$$\phi\text{の勾配} \quad \text{grad } \phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} \quad (6)$$

(5)と(6)の内積をとると、

$$\text{grad } \phi \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)dz = d\phi \quad (7) \quad \leftarrow \text{スカラー関数 } \phi \text{ の全微分}$$

スカラー場の勾配

微小変位 $d\vec{r}$ を $\phi = \text{一定}$ (ex. 等電位面) の方向に選んだとき,

$$\text{grad } \phi \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dz = d\phi = 0$$

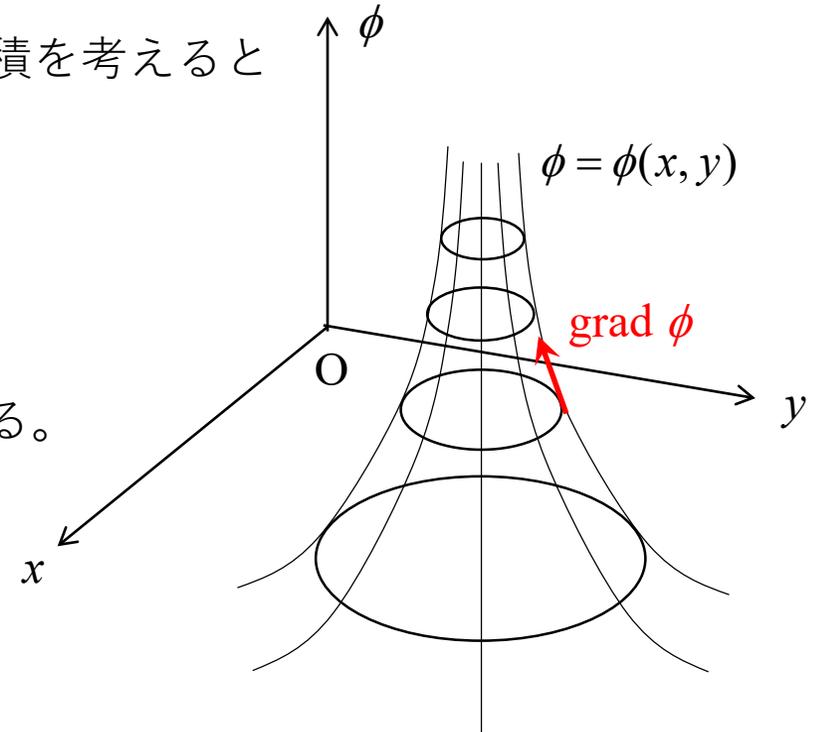
$\therefore \text{grad } \phi \perp d\vec{r} \quad \longrightarrow \quad \text{grad } \phi$ の向きは等電位面に垂直になっている。

ϕ の勾配と微小変位 $d\vec{r}$ のなす角を θ として, ϕ の勾配と微小変位 $d\vec{r}$ の内積を考えると

$$d\phi = \text{grad } \phi \cdot d\vec{r} = |\text{grad } \phi| |d\vec{r}| \cos \theta$$

$$\therefore \frac{d\phi}{dr} = |\text{grad } \phi| \cos \theta$$

となり, ϕ の勾配と微小変位 $d\vec{r}$ の内積が最大となるのは $\theta = 0$ のときである。
よって, スカラー場の傾きは等電位面に垂直な方向で最も大きくなる。
そして, その方向の傾きが $\text{grad } \phi$ の大きさになっている。



2 ベクトル場の発散

発散と微分演算子 ∇

ベクトル関数 $\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\vec{i} + E_y(x, y, z)\vec{j} + E_z(x, y, z)\vec{k}$ に対する発散は、

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (1)$$

と書くことができる。これは、ベクトル関数 \vec{E} に微分演算子

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2)$$

(∇ はナブラと読む) が作用したものと考えることができる。すなわち、発散は ∇ を用いて、

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} \quad (3)$$

と書くことができる。

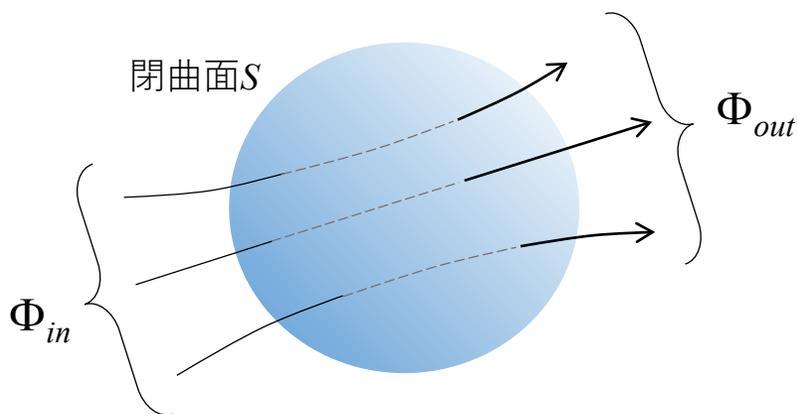
閉曲面のフラックス

電気力線

各点における電場のようすを直感的にとらえるために、電気力線の接線方向が電場の方向と一致するように描いた線

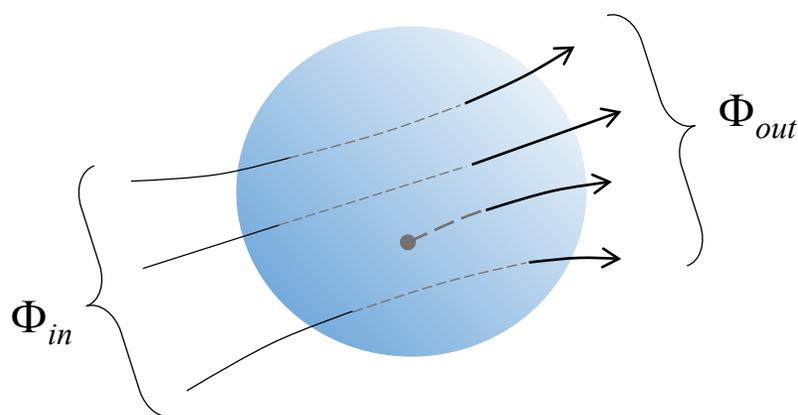
ex) 磁力線, 磁束線, 流線なども同様に議論できる。

電気力線を貫く電気力線の本数



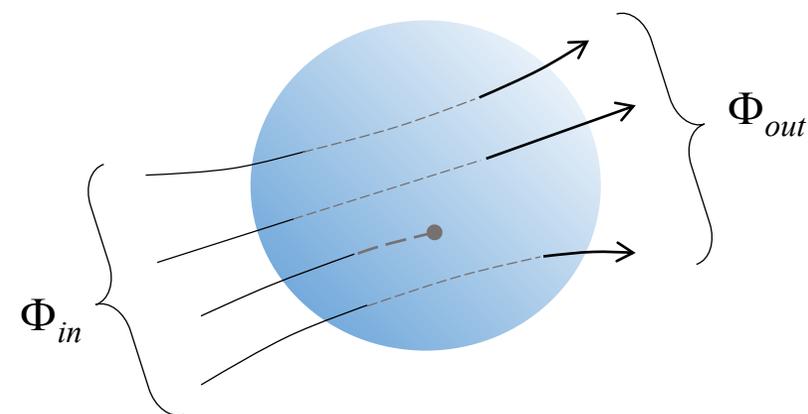
$$\Phi_{in} = \Phi_{out}$$

(a) 何もなし



$$\Phi_{in} < \Phi_{out}$$

(b) 湧き出しあり



$$\Phi_{in} > \Phi_{out}$$

(c) 吸い込みあり

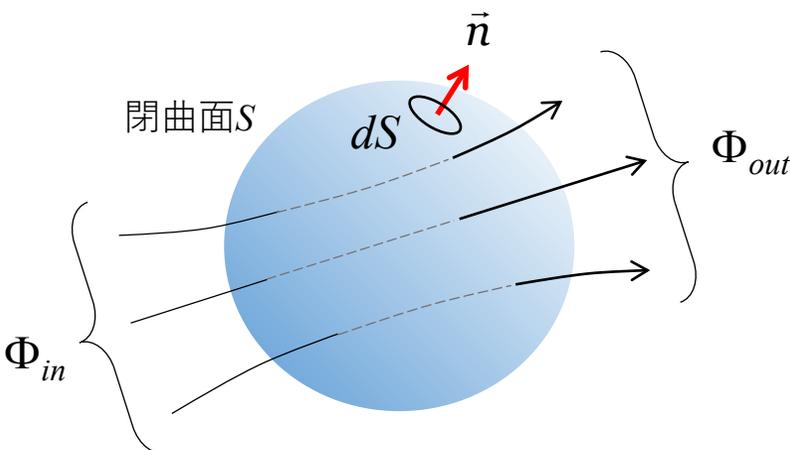
閉曲面のフラックス

正味の湧き出しの量 $\Phi = \Phi_{out} - \Phi_{in}$ ← “吸い込み”は“負の湧き出し”と考える。

閉曲面 S を貫く電気力線の本数 $\Phi = \oint_{\text{閉曲面}S} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ ← 閉曲面 S によって囲まれた湧き出しの量

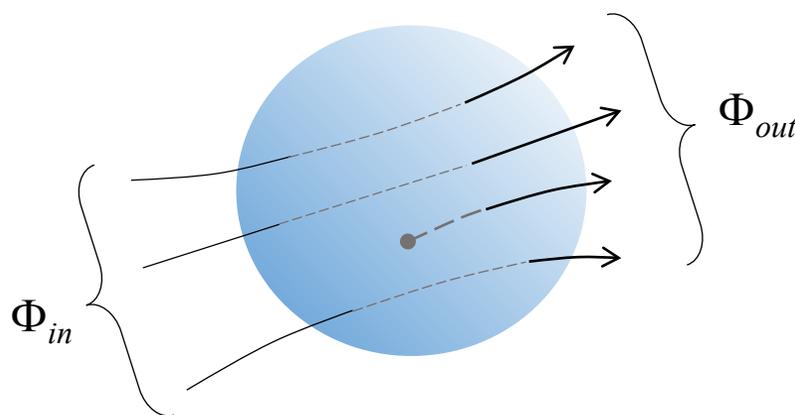
閉曲面 S 全体に渡って面積分することを意味する。

$d\vec{S} = \vec{n}dS$
(面積ベクトル)



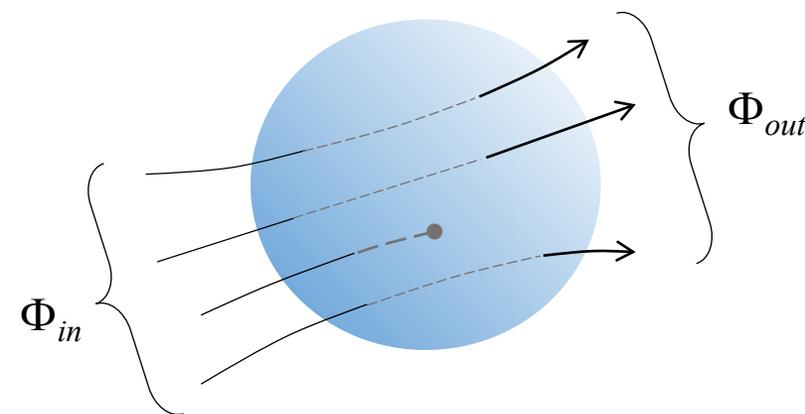
$$\Phi = \Phi_{out} - \Phi_{in} = 0$$

(a) 何もなし



$$\Phi = \Phi_{out} - \Phi_{in} > 0$$

(b) 湧き出しあり



$$\Phi = \Phi_{out} - \Phi_{in} < 0$$

(c) 吸い込みあり

湧き出しと発散

点 (x, y, z) における微小体積 $\Delta x \Delta y \Delta z$ （表面積 ΔS ）を考え、 ΔS のフラックス $\Delta \Phi = \oint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ を求める。

まず、微小面 $\Delta y \Delta z$ を貫く \vec{E} を考える。

$x = x + \Delta x/2$ における微小面 $\Delta y \Delta z$ に関するフラックスは、

$$E_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) \Delta y \Delta z$$

$x = x - \Delta x/2$ における微小面 $\Delta y \Delta z$ に関するフラックスは、

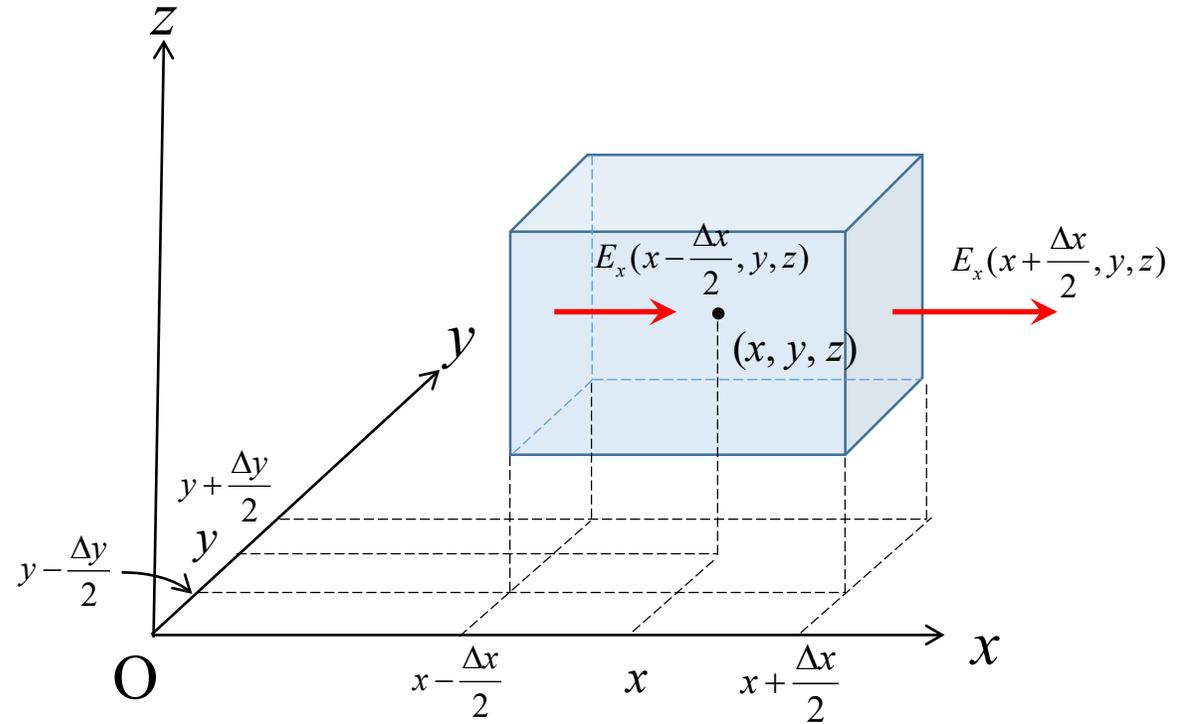
$$E_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z) \Delta y \Delta z$$

ここで、

$$E_x(x \pm \frac{\Delta x}{2}, y, z) = E_x(x, y, z) \pm \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

と近似できるから、 \vec{E} が微小面 $\Delta y \Delta z$ を内から外へ貫く正味の湧き出し量は、

$$\left[E_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - E_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z) \right] \Delta y \Delta z = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$



湧き出しと発散

以上より、 \vec{E} が微小面 $\Delta y \Delta z$ を内から外へ貫く正味の湧き出し量は、

$$\left[E_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - E_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \right] \Delta y \Delta z = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

同様に、 \vec{E} が微小面 $\Delta z \Delta x$ を内から外へ貫く正味の湧き出し量は、

$$\left[E_x\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) - E_x\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) \right] \Delta y \Delta z = \frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

\vec{E} が微小面 $\Delta x \Delta y$ を内から外へ貫く正味の湧き出し量は、

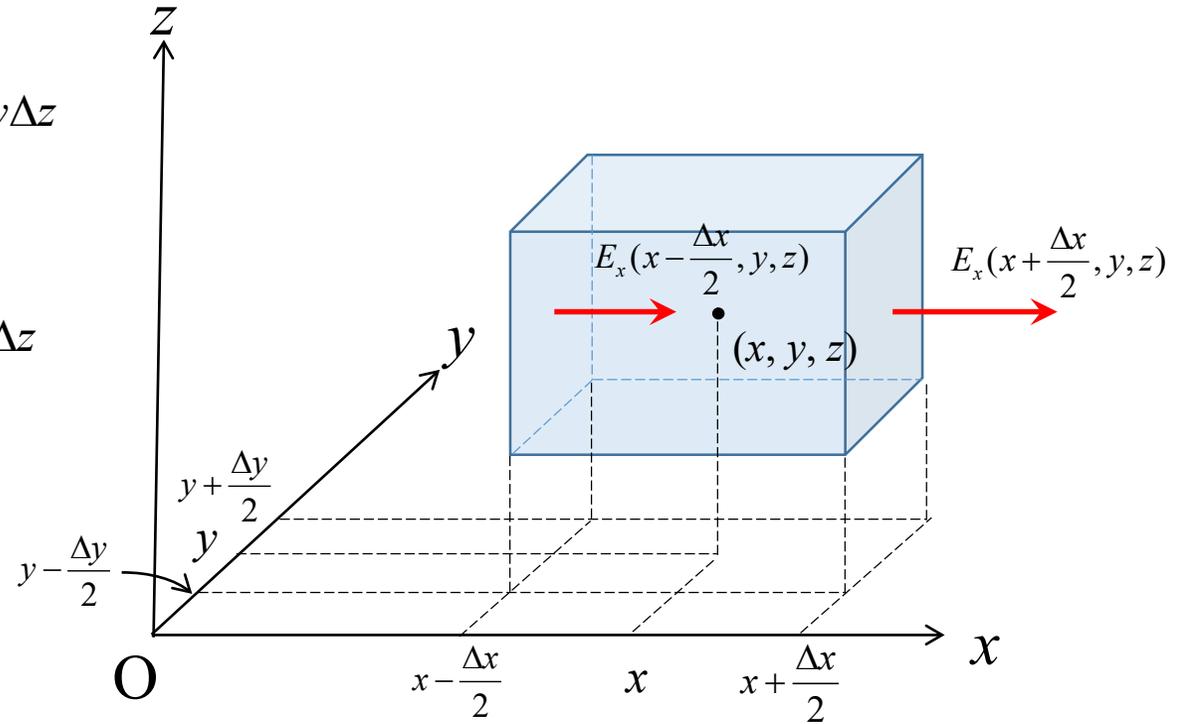
$$\left[E_x\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) - E_x\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right) \right] \Delta y \Delta z = \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

点 (x, y, z) における微小体積 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ の表面 ΔS を内から外へ貫く正味の湧き出し量（フラックス）は、

$$\Delta \Phi = \oint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

点 (x, y, z) における単位体積あたりの湧き出し（発散）は、

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{E}$$



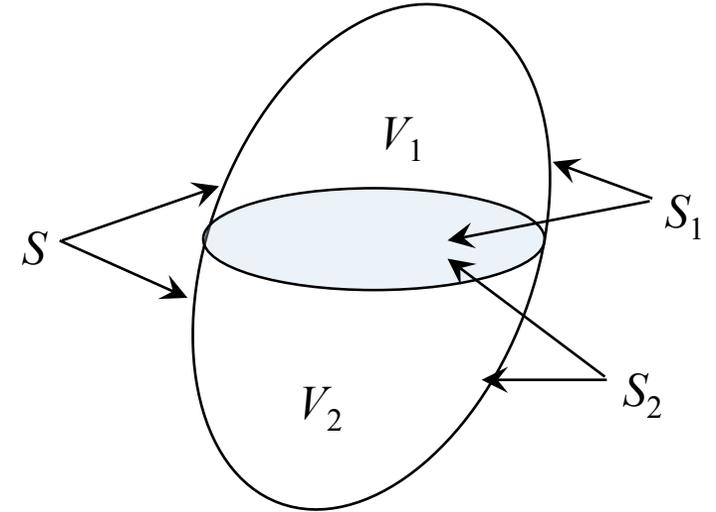
ガウスの発散定理

ベクトル場 \vec{E} において、ある閉曲面 S を貫いて外に湧き出していくフラックスを考える。閉曲面 S で囲まれる体積を V とし、それを V_1 と V_2 に分割する。

それぞれの表面積、すなわち閉曲面を S_1 , S_2 とすると、両者が共有する面の面積分は、一方から出たものは他方では入るものであるから、

$$\therefore \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

S_1 と S_2 についての面積分の和をとると、共有する面の面積分は互いに打ち消し合って、結局、閉曲面 S を貫いて出るフラックスに等しくなる。



体積 V を微小体積 ΔV_i (表面積 ΔS_i) に隙間なく n 個に分割し、 $n \rightarrow \infty$ とする。共有する面についての面積分では互いに打ち消し合い、結局、隣り合う面のない表面 S のみの積分が残るから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \oint_{\Delta S_i} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

微小体積については、次式が成り立つから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \text{div } \vec{E}_i \Delta V_i = \int_V \text{div } \vec{E} dV$$



$$\therefore \oint_{\text{閉曲面 } S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{体積 } V} \text{div } \vec{E} dV \quad \text{ガウスの発散定理}$$

閉曲面 S を貫いているベクトル \vec{E} のフラックスは、その体積内部に含まれる \vec{E} の湧き出しの総量に等しい。

3 ベクトル場の回転.

回転と微分演算子 ∇

ベクトル関数 $\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\vec{i} + E_y(x, y, z)\vec{j} + E_z(x, y, z)\vec{k}$ に対する回転は、

$$\text{rot } \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (1)$$

と書くことができる。これは、ベクトル関数 \vec{E} に微分演算子

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2)$$

(∇ はナブラと読む) が作用したものと考えることができる。すなわち、回転は ∇ を用いて、

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (3)$$

と書くことができる。

電場の周回積分と循環

右図の電場のなかをA → Bまで単位電荷を移動させるときの仕事について考える。

- C_1 では電場の流れに乗る
 - C_2 では電場の流れに逆らう
- 渦が存在するため、
経路によって必要とする仕事が異なる。

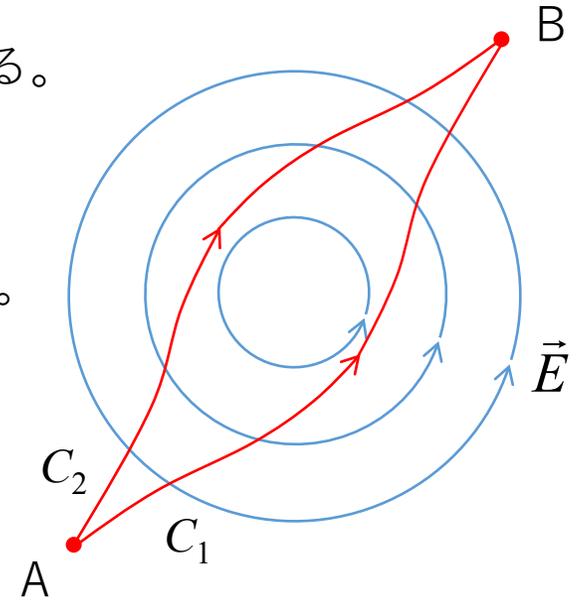
$$\text{仕事の差 } \Gamma = \int_{A(C_1)}^B \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_{A(C_2)}^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{A(C_1)}^B \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{B(C_2)}^A \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

C_1 と C_2 でつくられる閉曲線を C とすれば、

$$\therefore \Gamma = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

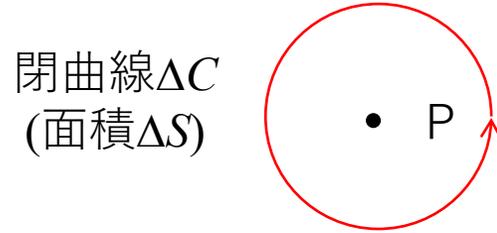
- 閉曲線 C 一周についての積分（周回積分）
- Γ は循環（circulation）とよばれる。

ここで、 $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma > 0 : \text{積分した方向の渦があるとき} \\ \Gamma < 0 : \text{積分した方向と逆向きの渦があるとき} \end{array} \right.$



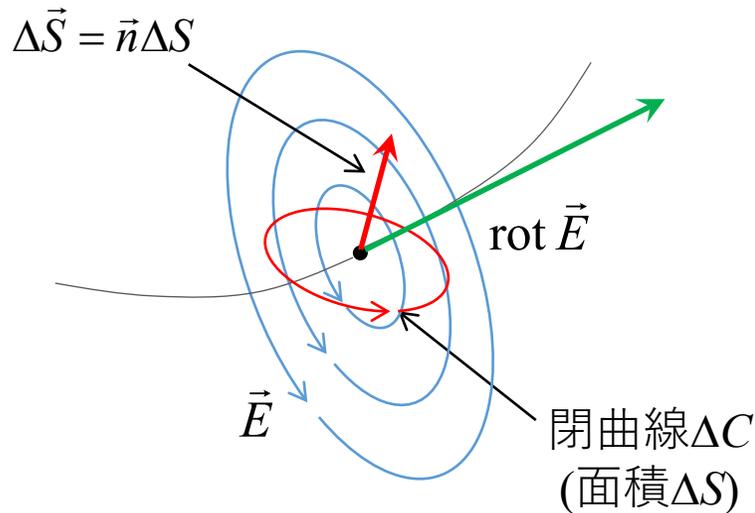
渦と回転

ある点Pにおける単位面積あたりの渦の量 (定量化)



$$\text{循環} \quad \Delta\Gamma = \oint_{\Delta C} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

ある点Pにおける単位面積あたりの平均の渦の量は $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}$



渦に対して右ねじの進む向きと渦の強さを大きさにもつベクトルを $\text{rot } \vec{E}$ と書くと, ΔS に垂直な成分は,

$$(\text{rot } \vec{E}) \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta C} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

また, ΔS が十分小さければ,

$$(\text{rot } \vec{E}) \cdot \vec{n} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} \Rightarrow \therefore \Delta\Gamma = (\text{rot } \vec{E}) \cdot \underline{\vec{n}\Delta S} = (\text{rot } \vec{E}) \cdot \Delta\vec{S}$$

$\Delta\vec{S}$ とおく

ベクトル場 \vec{E} の回転

ベクトル場 \vec{E} の回転の具体的表式について考える。

$$\Delta\Gamma = \int_{\text{閉曲線}\Delta C_x} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

いま、右図のyz面内の微小ループ ΔC_x に対して循環 $\Delta\Gamma$ を求める。

(x, y, z) から $(x, y+\Delta y, z)$ までの線積分では、 $\Delta\vec{r} = (0, \Delta y, 0)$ であり、 Δy が微小なので、積分区間での電場は $\vec{E}(x, y, z) = \text{一定}$ とみなせるから、

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = E_y(x, y, z, t)\Delta y$$

$(x, y+\Delta y, z)$ から $(x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ では、 $\Delta\vec{r} = (0, 0, \Delta z)$ であり、 Δz が微小なので、積分区間では $\vec{E}(x, y+\Delta y, z) = \text{一定}$ とみなせるから、

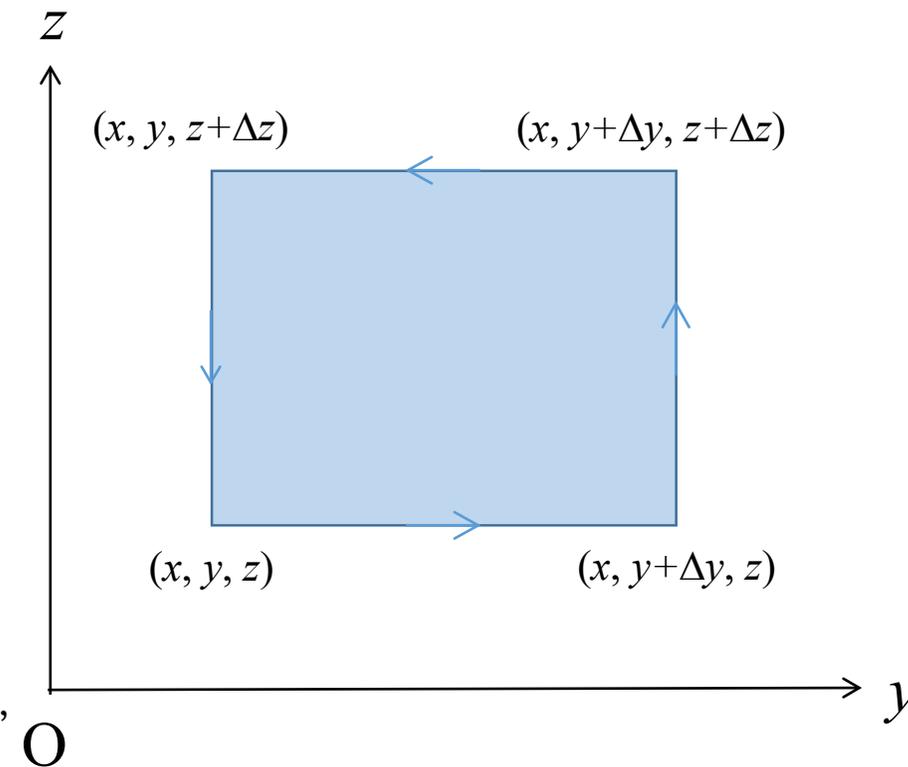
$$\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = E_z(x, y+\Delta y, z, t)\Delta z$$

$(x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ から $(x, y, z+\Delta z)$ では、 $\Delta\vec{r} = (0, -\Delta y, 0)$ であり、 Δy が微小なので、積分区間では $\vec{E}(x, y, z+\Delta z) = \text{一定}$ とみなせるから、

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -E_y(x, y, z+\Delta z, t)\Delta y$$

最後に、 $(x, y, z+\Delta z)$ から (x, y, z) では、 $\Delta\vec{r} = (0, 0, -\Delta z)$ であり、 Δz が微小なので、積分区間では $\vec{E}(x, y, z) = \text{一定}$ とみなせるから、

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -E_z(x, y, z, t)\Delta z$$



ベクトル場 \vec{E} の回転

右図の微小ループ ΔC_x に対して、線積分を実行すると、

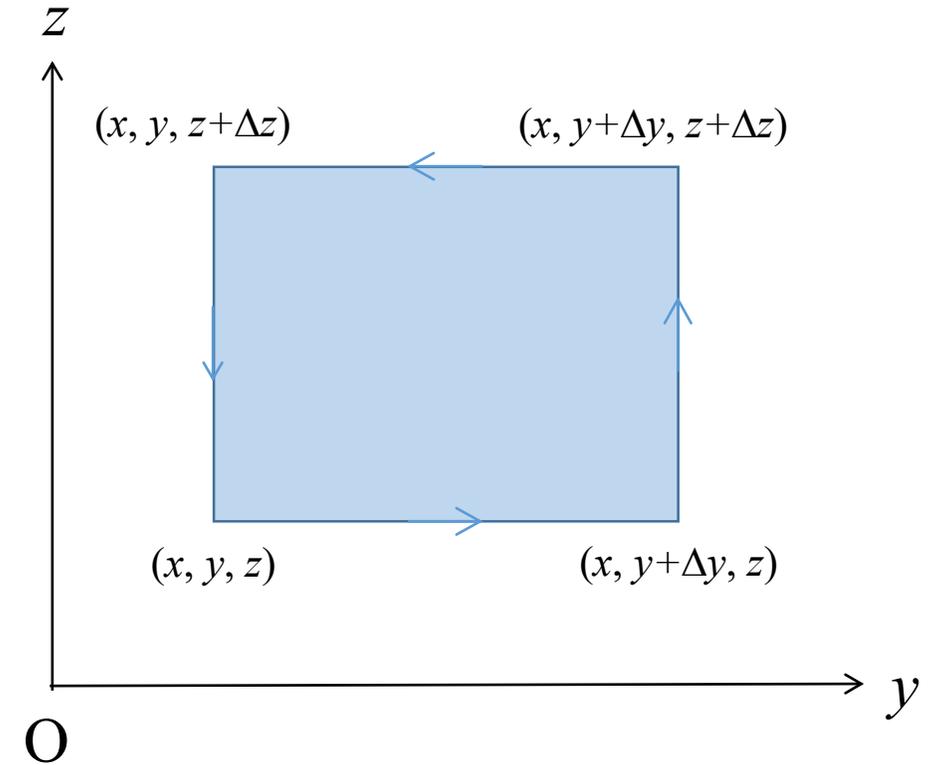
$$\begin{aligned} \int_{\text{閉曲線 } C_x} \vec{E} \cdot d\vec{r} &= [E_z(x, y + \Delta y, z, t) - E_z(x, y, z, t)] \Delta z \\ &\quad - [E_y(x, y, z + \Delta z, t) - E_y(x, y, z, t)] \Delta y \\ &= \left[\frac{E_z(x, y + \Delta y, z, t) - E_z(x, y, z, t)}{\Delta y} \right] \Delta y \Delta z \\ &\quad - \left[\frac{E_y(x, y, z + \Delta z, t) - E_y(x, y, z, t)}{\Delta z} \right] \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

ここで Δy と Δz が微小であることを考慮して、

$$\therefore \Delta\Gamma = \int_{\text{閉曲線 } C_x} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z$$

よって、点 (x, y, z) における yz 平面内の単位面積あたりの渦の強さ、すなわち点 (x, y, z) における回転 $\text{rot } \vec{E}$ の x 成分は

$$\therefore (\text{rot } \vec{E})_x = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta C_x} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$$



ベクトル場 \vec{E} の回転

以上より、回転の x 成分は、

$$(\text{rot } \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

他の成分も同様に求めると、

$$(\text{rot } \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (\text{rot } \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

これより、

$$\text{rot } \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

または、ナブラ演算子 ∇ を用いて、

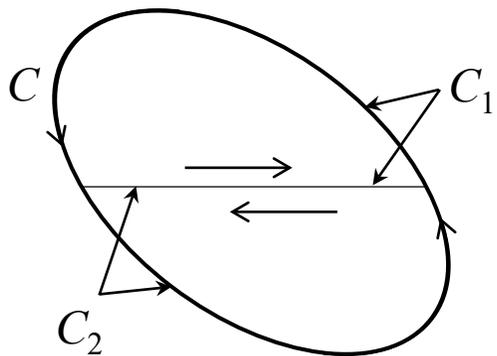
$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

と書くことができる。

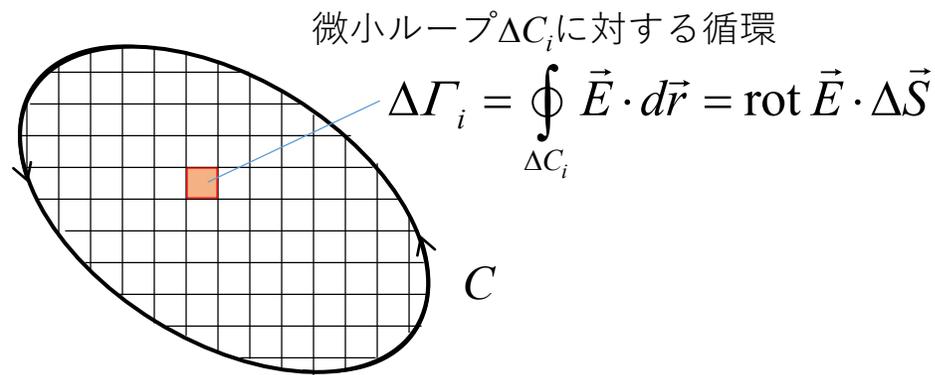
ストークスの定理

ベクトル場 \vec{E} において、あるループ C についての周回積分を考える。

ループ C を C_1 と C_2 に分割したとき



ループ C を微小なループ ΔC_i (面積 ΔS) に隙間なく n 個に分割し、 $n \rightarrow \infty$ とする。



共有する辺の線積分は互いに逆向きとなるので、 C_1 と C_2 についての周回積分の和をとると、共有する辺の線積分は互いに打ち消し合って、結局ループ C の周回積分になる、

$$\therefore \oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$



微小ループ ΔC_i においても、共有する辺の線積分は互いに打ち消し合って、結局ループ C の周回積分になるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \oint_{\Delta C_i} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

ストークスの定理

ベクトル場 \vec{E} において、あるループ C についての周回積分を考える。

ループ C を微小なループ ΔC_i (面積 ΔS) に隙間なく n 個に分割し、 $n \rightarrow \infty$ とする。

微小ループ ΔC_i においても、共有する辺の線積分は互いに打ち消し合って、結局ループ C の周回積分になるので、

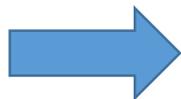
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \oint_{\Delta C_i} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

各々の微小ループ ΔC_i に対して、

$$\Delta \Gamma_i = \oint_{\Delta C_i} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \text{rot } \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}_i$$

が成り立つから、

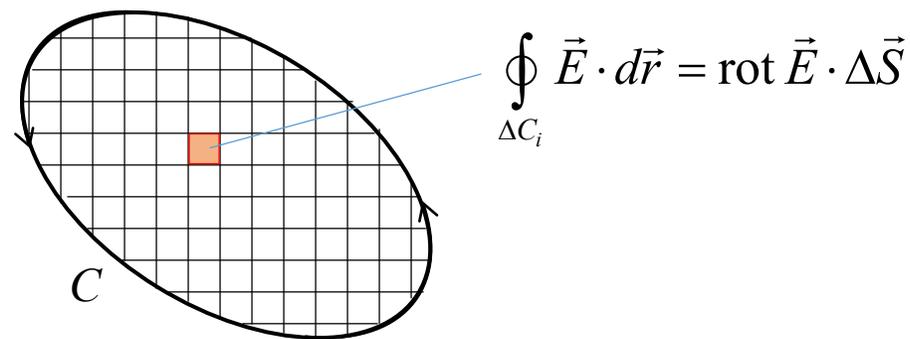
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \text{rot } \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}_i = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$



$$\therefore \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \text{ストークスの定理}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \text{rot } \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}_i = \oint_C \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

ある閉曲線 C についてのベクトル \vec{E} の周回積分は、それを縁とする面内の \vec{E} の回転の総量に等しい。



勾配, 発散, 回転のまとめ

ナブラ
nabla $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$

勾配
gradient

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$$

発散
divergence

$$\text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

回転
rotation

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

スカラーポテンシャル

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi \text{ のとき, } \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \text{ を満たす。}$$

ベクトルポテンシャル

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \text{ のとき, } \text{div } \vec{B} = 0 \text{ を満たす。}$$

ガウスの発散定理

$$\oint_{\text{閉曲面} S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{体積} V} \text{div } \vec{E} dV$$

ストークスの定理

$$\oint_{\text{閉曲線} C} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{曲面} S} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$